Höhere ANALYSIS

Differentialgleichungen
1. Ordnung

Riesige Aufgabensammlung

Stand 20. Dezember 2024

Datei Nr. 53020

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt

DGL 1. Ordnung

1 $x^2y'+2xy+4=0$

2 $(x^2+1)\cdot y'+2xy=0$

3 $(x+2)y'-\frac{1}{3}y=(x+2)^{7/3}$

4 $xy'-y=x$

5 $2y'+3\sqrt{x}\cdot y=0$

6 $y'+\frac{y}{x}=x^2+4$

7 $y'+xy-\frac{1}{2}x=0$

8. $y'\cdot\sqrt{y}=x^3$

11 $\frac{y'}{y'+y}+e^x=0$

12 $(1-x)\cdot y'=y+e^x$

13 $y'=(2x-1)y-\frac{5}{2}\cdot e^{x^2-1}$

14

21 $y'=y^2\cdot x\cdot\sin(x)$

22 $y'=-2\cdot\tan(x)\cdot y+\cos^3(x)$

23 $y'+5y=-26\cdot\sin(x)$

24 $y'\cdot\cos(x)+y\cdot\sin(x)=\tan(x)$

25 $xy'+2y=\sin(x)$

26 $y'=(1-y)\cdot\sin(x)$

27 $y'\cdot\sin(x)-2y\cdot\cos(x)=\sin^5(x)$

28 $y'\cdot\sin(x)-2y\cdot\cos(x)=x\cdot\sin^5(x)$

29 $\frac{1}{2}y'\cdot\sin(2x)-y+\sin^3(x)=0$

30 $y'+\cos(x)\cdot y=\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)$

1 a) Löse die DGL $x^2y'+2xy+4=0$.

b) Welche Lösung geht durch $P(1|0)$ bzw. $Q(-2|1)$ und welchen Anstieg hat sie dort?

c) Erstelle für die inhomogene Differenzialgleichung eine Tabelle des Richtungsfeldes in den Gitternetzpunkten $\{(x|y)|\ 1<x\le 4,\ -3\le y\le 3 \text{ mit } x,y\in\mathbb{Z}\}$.

Versuche anhand des Richtungsfeldes für die zweite Differenzialgleichung den Graphen der Lösungsfunktion durch den Punkt P(1|0) im Intervall $0<x\le 4$ zu zeichnen.

d) Bestimme die Gleichung der Isoklinen zur Steigung m = -1.

Lösung:

a) Lösung der homogenen Gleichung: $x^2\cdot y'+2xy=0$

Trennung der Variablen: $x^2\cdot y'+2xy=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{2}{x}dx$

Integration: $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{-2}{x}dx$

Ich zeige nun zwei unterschiedliche Lösungen, wobei ich die Integrationskonstante auf unterschiedliche Arten verwende. Beide Methoden führen zum gleichen Ergebnis.

1. Art:

$\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln|y|=-2\ln|x|+C=\ln|x|^{-2}+C$

$e^{\ln|y|}=e^{\ln|x|^{-2}+C}=e^{\ln|x|^{-2}}\cdot e^C$

Regel: $e^{\ln(a)}=a$ $\Rightarrow |y|=|x|^{-2}\cdot e^C=\frac{e^C}{x^2}$

Ohne Betrag: $y=\boxed{\pm e^C}\frac{1}{x^2}=k\cdot\frac{1}{x^2}$

mit der neuen Konstanten $k=\pm e^C$.

2. Art:

$\int\frac{dy}{y}=-2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y|=-2\ln|x|+\ln|C|$

$\ln|y|=\ln|x|^{-2}+\ln|C|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$

$e^{\ln|y|}=e^{\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|} \Leftrightarrow |y|=\left|\frac{C}{x^2}\right|$

Ohne Betrag: $y=\pm\frac{C}{x^2}=k\cdot\frac{1}{x^2}$

mit der neuen Konstanten $k=\pm C$

Lösung: $y_O(x)=\frac{k}{x^2}$ mit $k\in\mathbb{R}$

Lösung der inhomogenen Gleichung: $x^2y'+2xy+4=0$ bzw. $y'=-\frac{2y}{x}-\frac{4}{x^2}$

Methode: Trennung der Variablen: $y_P(x)=\frac{k(x)}{x^2}$ mit $y_P{}'=\frac{k'(x)\cdot x^2-2x\cdot k(x)}{x^4}=\frac{k'(x)}{x^2}-2\frac{k(x)}{x^3}$

Einsetzen in die DGL: $x^2\cdot\left[\frac{k'(x)}{x^2}-2\frac{k(x)}{x^3}\right]+2x\cdot\frac{k(x)}{x^2}+4=0$

$k'(x)\underbrace{-2\frac{k(x)}{x}+2\frac{k(x)}{x}}_{=0}+4=0 \Rightarrow k'(x)=-4$

Integration: $k(x)=\int-4\cdot dx=-4x+C$

In (*): Partikuläre Lösung: $y_P(x)=\frac{-4x+C}{x^2} \Rightarrow y_P(x)=-\frac{4}{x}+\frac{C}{x^2}$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y(x) = y_O(x) + y_P(x)$

$$y(x) = \frac{k}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{k+C}{x^2} - \frac{4}{x}.$$

Mit $C_1 := k + C$ folgt: $y(x) = \frac{C_1}{x^2} - \frac{4}{x}$

b) Welche Lösung geht durch $P(1|0)$ und welchen Anstieg hat sie dort?

$$0 = \frac{k}{1} - \frac{4}{1} \Rightarrow k = 4 \quad \text{und} \quad y'(1;0) = -\frac{0}{1} - \frac{4}{1} = -4$$

Die Lösungsfunktion ist dann $y = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} = 4\frac{x+1}{x^2}$

Welche Lösung geht durch $Q(-2|1)$ und welchen Anstieg hat sie dort?

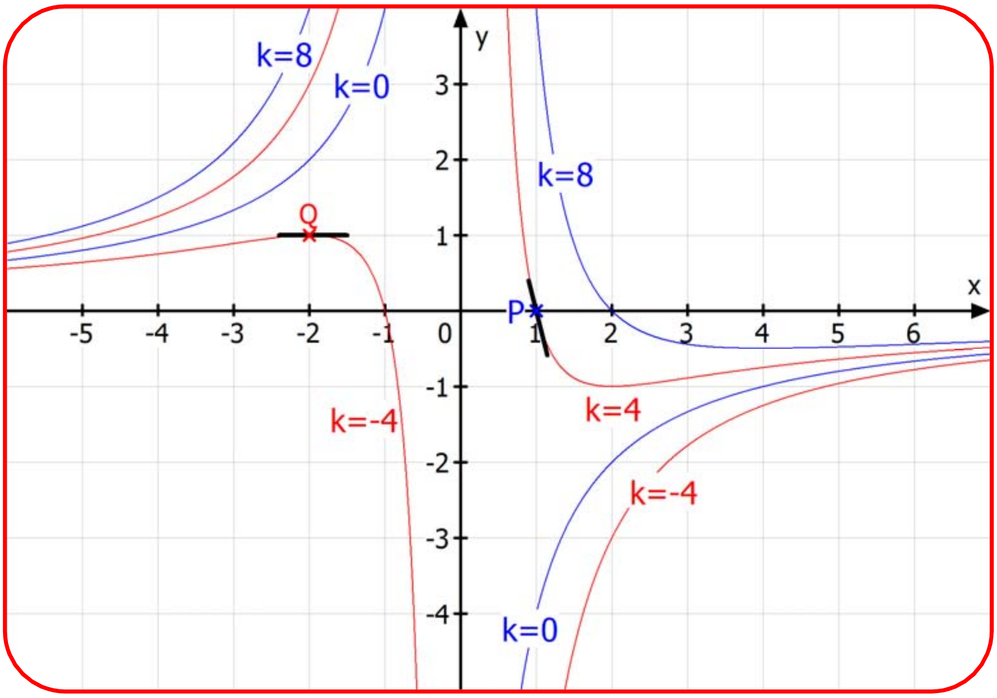
$$1 = \frac{k}{(-2)^2} - \frac{4}{(-2)} \Rightarrow 1 = \frac{k}{4} + 2 \Rightarrow k = -4$$

und $y'(1;0) = -\frac{0}{1} - \frac{4}{1} = -4$

Die Lösungsfunktion ist dann $y = \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x} = 4\frac{-1+x}{x^2} = 4\frac{x-1}{x^2}$

Zusatz:

In P und Q sind kurze Tangentenstücke (Richtungselemente) eingezeichnet.
Außerdem sind die Kurven für k = 0 und k = 8 eingezeichnet.



c) Richtungsfeld: $x^2y'+2xy+4=0 \Rightarrow y'=\frac{2xy+4}{x^2} \Rightarrow \boxed{y'(x,y)=\frac{2y}{x}+\frac{4}{x^2}}$

Diese Tabelle enthält die Tangentensteigungen $y'(x,y)$ zu den angegebenen Gitternetzpunkten.

3	-10	-4	$-2{,}4$	$-1{,}8$
2	-8	-3	$-1{,}8$	-1.3
1	-6	-2	$-1{,}1$	$-0{,}8$
0	$\boxed{-4}$	-1	$-0{,}4$	$-0{,}3$
-1	-2	$\boxed{0}$	0.22	0,25
-2	0	1	0,88	0,75
-3	2	2	1,55	1,25
↑y x→	1	2	3	4

Hier die Schar der Lösungskurven für $-9 \le k \le 9$

mit Stepp 3, also für $k \in \{-9;-6;-3;0;3;6;9\}$,

dargestellt mit MatheGrafix.

Zusätzlich ist die Lösungskurve durch $P(1|0)$ gezeichnet.

Zu welchem k gehört sie?

Punktprobe mit $P(1|0)$: $\boxed{0}=\frac{k}{\boxed{1}}-\frac{4}{\boxed{1}} \Leftrightarrow k=4$

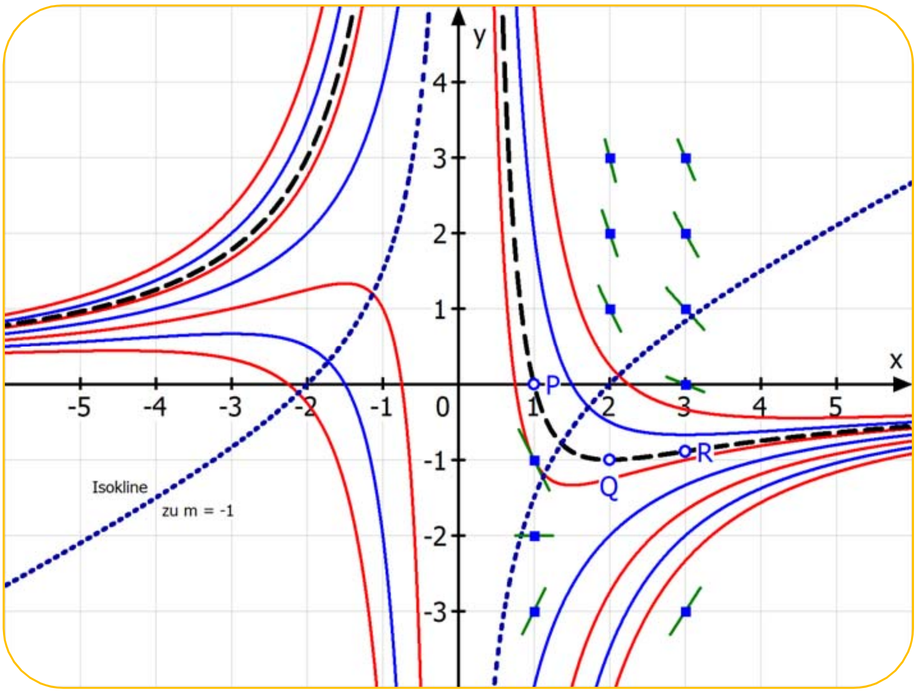
Sie hat also die Gleichung $y(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}=4\cdot\frac{1-x}{x^2}$

und hat in $P(1|0)$ die Steigung $y'(1|0)=-4$,

und in $Q(2|-1)$ $y'(2|-1)=0$

und in $R\left(3|-\frac{8}{9}\right)$ $y'\left(3|-\frac{8}{9}\right)=-\frac{4}{27}\approx -0{,}15$

Im folgenden Richtungsfeld sind nicht alle geforderten Linienelemente eingetragen



Die gepunktete Kurve ist die Isokline zu $m=-1$. Ihre Gleichung folgt aus der DGL für $y'=-1$:

$$x^2y'+2xy+4=0 \Rightarrow -x^2+2xy+4=0 \Rightarrow 2xy=x^2-4 \Rightarrow y=\frac{x^2-4}{2x}=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$$

Alle Punkte dieser°Isokline gehören zu Kurven, die dort die Steigung -1 haben.

Fortsetzung im Original